

# Τέταρτο Τεστ Απειροστικός Λογισμός Ι

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Διάρκεια: 2 ώρες

## ΘΕΜΑ 1

Να χαρακτηρίσετε με πλήρη αιτιολόγηση τους παρακάτω ισχυρισμούς ως **Αληθείς** ή **Ψευδείς**.

- Έστω μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $a$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Αν  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ , τότε η  $f$  είναι φραγμένη.
- Το 1 είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου  $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ .
- Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} \sin \frac{1}{x} - x^{-2/3} \cos \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$  είναι φραγμένη.
- Το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \cos 2x$  υπάρχει.
- Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x^2 - 1|} - 1 = 0$ .

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{|x|+x}$ .

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $f$ .
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφό της.
- Με χρήση του  $\varepsilon$ - $\delta$  ορισμού αποδείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow 3/4} f^{-1}(x) = 2$ .

## ΘΕΜΑ 3

- Αν  $a \in (0,1)$  αποδείξτε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$
- Δεδομένου ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{x+4} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\sin x}.$$

- Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 6} (x - [x])$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos 2x$ .

## ΘΕΜΑ 4

Έστω αύξουσα συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και έστω μια μονότονη ακολουθία  $(x_n)$  πραγματικών αριθμών η οποία συγκλίνει. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία τιμών  $(f(x_n))$  είναι επίσης συγκλίνουσα. Ισχύει το παραπάνω συμπέρασμα αν παραλείψουμε την υπόθεση ότι η ακολουθία  $(x_n)$  είναι μονότονη;

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!



Only Maths

-Official-